УДК 519.6

О.М. Литвин, Л.С. Лобанова, Г.В. Залужна
Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків, Україна
Україна, 61003, м. Харків, вул. Університетська, 16
academ@kharkov.ua, ludmila_lobanova@mail.ru, zal_artem@mail.ru

Про один підхід до тестування нових методів розв'язання нестаціонарної задачі теплопровідності

O.N. Lytvyn, L.S. Lobanova, G.V. Zalyzhna
Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy
Ukraine, 61003, Kharkiv, Universytetska St., 16

On the Approach to Testing of New Methods for Solving the Unsteady Heat Conduction Problem

О.Н. Литвин, Л.С. Лобанова, Г.В. Залужная
Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков, Украина
Украина, 61003, г. Харьков, ул. Университетская, 16

Об одном подходе к тестированию новых методов решения нестационарной задачи теплопроводности

У роботі запропонований метод побудови точних розв'язків нестаціонарної задачі теплопровідності в областях, складених з прямокутників. Пропонується аналіз результатів обчислювального експерименту, проведеного авторами за допомогою створеної ними програми при розв'язанні прикладу в областях, складених з прямокутників. Розглянуто приклад області, що має форму швелера.
Ключові слова: нестаціонарна задача теплопровідності, інтерлінація, метод скінченних елементів, початково-крайова задача.

In this paper, the method for constructing exact solutions of unsteady heat conduction problem for areas, which are made of rectangles, is proposed. The analysis of the results of computational experiment is offered. It was conducted by the authors with the help of two programs for solving the example in areas, which are made of rectangles. The example of area, which has a shape of channel bars, is considered.
Key words: unsteady heat conduction problem, interlination, finite elements method, the initial-boundary value problem.

В работе предложен метод построения точных решений нестационарной задачи теплопроводности в областях, составленных из прямоугольников. Предлагается анализ результатов вычислительного эксперимента, проведенного авторами с помощью созданной ими программы при решении примера в областях, составленных из прямоугольников. Рассмотрен пример области, имеющей форму швелера.
Ключевые слова: нестационарная задача теплопроводности, интерлинация, метод конечных элементов, начально-краевая задача.

Вступ

У праці [1] запропонований метод ЛІДР розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними (метод зведення до системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь). У статтях [2], [3] досліджувалися деякі аспекти чисельної реалізації методу, запропонованого в статті [1]. У даній роботі пропонується аналіз результатів обчислювального експерименту, проведеного авторами за допомогою створеної ними програми при розв'язанні прикладу в областях, складених з прямокутників. У цьому прикладі розв'язувалась тестова крайова задача, в якій був відомий точний розв'язок, побудований з використанням методики, викладеної в роботі [4], відповідним чином перенесеної на випадок нестаціонарної задачі теплопровідності.

У статті [2] розглянуто більш детально структура наближеного розв'язку, коли областю є прямокутник. У даній роботі досліджуються його можливості для випадку областей, складених з прямокутників. Зокрема, ідея цього методу використовується для побудови точного розв'язку нестаціонарної задачі теплопровідності, що належить класу $C^{2,2,1}\left(\overline{D}\times\left(0,+\infty\right)\right)$. Розглянуто приклад для швелера.

Основні твердження методу

Наближений розв'язок задачі:

$$L[u(x,y,t)]:=u_t'-\left(a_1(x,y)u_x'\right)_x'-\left(a_2(x,y)u_y'\right)_y'=f(x,y,t),$$

$$(x,y)\in\Omega\subset R^2,\quad t>0, \tag{1}$$

$$u(x,y,t)=0,\quad (x,y)\in\partial\Omega, \tag{2}$$

$$u(x,y,0)=\varphi_0(x,y),\quad (x,y)\in\Omega, \tag{3}$$

$$\varphi_0(x,y)\big|_{\partial\Omega}=0, \tag{4}$$

де Ω – область, складена з прямокутників – шукається у вигляді:

$$u_n(x,y,t)=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n^2-1}C_{kn,j}(t)\,h(nx-k)\,h(n^2y-j)+$$

$$+\sum_{\ell=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n^2-1}C_{i,\ell n}(t)\,h(n^2x-i)\,h(ny-\ell)-\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\ell=1}^{n-1}C_{kn,\ell n}h(nx-k)\,h(ny-\ell),$$

в якій $C_{\mu,\nu}(t)$ – невідомі функції, які задовольняють початкові умови

$$C_{k'n,j'}(0)=\varphi\left(\frac{k'}{n},\frac{j'}{n^2}\right),\ C_{i',\ell'n}(0)=\varphi\left(\frac{i'}{n^2},\frac{\ell'}{n}\right),\ C_{k'n,\ell'n}(0)=\varphi\left(\frac{k'}{n},\frac{\ell'}{n}\right).$$

Для їх знаходження розв'язується задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь відносно $C_{\mu,\nu}(t)$:

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial t},\varphi_{k'n,j'}\right)(t)+[u_n,\varphi_{k'n,j'}](t)=\left(f,\varphi_{k'n,j'}\right)(t)$$

$$\left(j'=\overline{1,\,n^2-1};\quad j'\neq\ell\cdot n;\quad k',\,\ell=\overline{1,\,n-1}\right),$$

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial t_j},\varphi_{i',\ell'n}\right)(t)+[u_n,\varphi_{i',\ell'n}](t)=\left(f,\varphi_{i',\ell'n}\right)(t)$$

$$\left(i'=\overline{1,\,n^2-1};\quad i'\neq k\,n;\quad k,\,\ell'=\overline{1,\,n-1}\right),$$

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial t},\varphi_{k'n,\ell'n}\right)(t)+[u_n,\varphi_{k'n,\ell'n}](t)=\left(f,\varphi_{k'n,\ell'n}\right)(t)\qquad(k',\,\ell'=\overline{1,\,n-1}),$$

де використовуються позначення:

$$\left(u,v\right)\left(t\right)=\iint_{\Omega}u\left(x,y,t\right)v\left(x,y,t\right)dx\,dy,\ [u,\ v]\left(t\right)=\iint_{\Omega}\left[a_1\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+a_2\frac{\partial u_n}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]dx\,dy.$$

Метод оснований на заміні формул інтерлінації [5] за змінними x,y відповідними формулами інтерполяції з точністю, яку має метод ЛІДР.

Згідно із загальною теорією методу скінченних елементів [6, с. 290], якщо позначимо через S^h простір МСЕ степеня $(k-1)$ за кожною змінною, то похибка апроксимації методом Гальоркіна задовольняє нерівностям:

$$\left\|u(t)-u^h(t)\right\|_0 \le \left\|u(t)-Pu(t)\right\|_0+\left\|e(t)\right\|_0 \le$$
$$\le C h^k\left[\left\|u(t)\right\|_k+e^{-\lambda_1 t}\left\|u_0\right\|_k+\int\limits_0^t e^{\lambda_1(\tau-t)}\left\|u_t(\tau)\right\|_k d\tau\right] \tag{5}$$

де h – максимальний крок розбиття, C – деяка стала,

$$u_0=\varphi_0=u(x,y,0),\ u_t(\tau)=\frac{du}{dt}(x,y,\tau),\ \left\|u(t)\right\|=\iint\limits_\Omega\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+u^2\right)dx\,dy .$$

Для цієї формули справедлива така оцінка похибки в енергетичній нормі:

$$a\left(u-S^h,u-S^h\right)\le C^2\cdot h^{2(k-1)}\left\|u\right\|^2,$$

де k – степінь скінченних елементів,

$$a(u,v)=\iint\limits_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+u\,v\right)dx\,dy ,$$

$$\left\|u(t)\right\|_0^2=\iint\limits_\Omega u^2\,dx\,dy .$$

Якщо ж використовуємо метод скінченних елементів, побудований на основі методу інтерлінації (ІМСЕ), то формула (5) для похибки зміниться і буде мати вигляд:

$$\left\|u(t)-u^S(t)\right\|_0\le C h^{2k}\left[\left\|u(t)\right\|+e^{-\lambda_1 t}\left\|u_0\right\|+\int\limits_0^t e^{\lambda_1(\tau-t)}\left\|u_t(\tau)\right\|d\tau\right]. \tag{6}$$

Постановка задачі

У даній роботі область D будемо вважати розміщеною в квадраті $D=[0,1]\times[0,1]$, складеною з об’єднання прямокутників $D_k=[a_k,b_k]\times[c_k,d_k]$, $k=\overline{1,M}$, зі сторонами, паралельними осям координат. Проведемо розбиття на прямокутні елементи за допомогою прямих $x=x_k$, $k=\overline{0,m}$, $y=y_\ell$, $\ell=\overline{0,n}$ так, щоб $\forall\, a_k,\ b_k,\ c_k,\ d_k$ серед точок розбиття існували такі $x_{\mu(k)}$, $y_{\mu(k)}$, $x_{\nu(k)}$, $y_{\nu(k)}$, що $a_k=x_{\mu(k)}$, $b_k=x_{\nu(k)}$, $c_k=y_{\mu(k)}$, $d_k=y_{\nu(k)}$.

Треба знайти наближений розв’язок $u(x,y,t)$ початково-крайової задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+f(x,y,t),\ (x,y)\in D,\ t>0, \tag{7}$$

$$u(x,y,0)=\varphi_0(x,y), \tag{8}$$

$$u(x,y,t)\big|_{\partial D}=0 \tag{9}$$

методом скінченних елементів, викладеним в статті [1], і порівняти його з наближеним розв’язком, знайденим МСЕ, в класичній формі. У роботі [3] досліджувався метод, викладений в [1], для прямокутної області, в даній роботі наведемо результати для області, що має форму швелера.

Побудова точних розв’язків тестових задач в областях, складених з прямокутників

Приклад. Розглянемо задачу нестаціонарної теплопровідності в області D, яка має форму швелера (рис. 1). $D=\Pi_1\setminus\Pi_2$, де $\Pi_1=[-a,a]\times[0,b]$, $\Pi_2=[-c,c]\times[d,b]$.

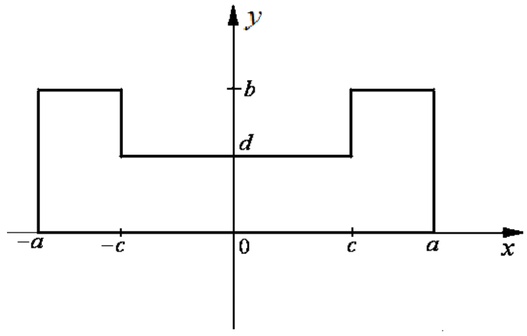


Рисунок 1 – Область D у формі швелера

Розіб'ємо область D на прямокутні елементи прямими $x = x_k$, $k = \overline{0,m}$; $y = y_l$, $l = \overline{0,n}$;

$$-a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m_1} = -c < x_{m_1+1} < \ldots < x_{m_2} = c < x_{m_2+1} < \ldots < x_m = a\,;$$

$$0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n_1-1} < y_{n_1} = d < y_{n_1+1} < \ldots < y_{n-1} < y_n = b\,.$$

Наближений розв'язок поставленої задачі шукаємо у вигляді:

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{\ell=1}^{n_1-1} C_{k\ell}(t)h_k(x)H_\ell(y) + \sum_{k=1}^{m_1-1}\sum_{\ell=n_1}^{n-1} C_{k\ell}(t)h_k(x)H_\ell(y) + \sum_{k=m_2+1}^{m-1}\sum_{\ell=n_1}^{n-1} C_{k\ell}(t)h_k(x)H_\ell(y), \quad (10)$$

де $(x,y)\in D,\ t\ge 0$,

$$h_k(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_{k-1}, \\ \dfrac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, & x_{k-1} < x \le x_k, \\ \dfrac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}, & x_k < x < x_{k+1}, \\ 0, & x \ge x_{k+1}. \end{cases}$$

Аналогічно визначаються функції $H_\ell(y)$.

$$\Im = \left\{(k,\ell)\,\middle|\, 1\le k\le m-1;\ 1\le \ell \le n_1-1;\ 1\le k\le m_1-1;\ n_1\le \ell\le n-1;\ m_2+1\le k\le m-1;\ n_1\le\ell\le n-1\right\}$$

Позначимо: $\Im = \Im_1 \cup \Im_2 \cup \Im_3$, де $\Im_1 = \left\{(k,\ell)\,\middle|\,1\le k\le m-1;\ 1\le\ell\le n_1-1\right\}$, $\Im_2 = \left\{(k,\ell)\,\middle|\,1\le k\le m_1-1;\ n_1\le\ell\le n-1\right\}$, $\Im_3 = \left\{(k,\ell)\,\middle|\,m_2+1\le k\le m-1;\ n_1\le\ell\le n-1\right\}$.

Функції $C_{k\ell}(t)$ $(k,\ell\in\Im)$ знаходимо, мінімізуючи вираз $J(u)$ з використанням методу локального потенціалу:

$$J(u) = \iint_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial t} - f(x,y,t)\right)u\right)dx\,dy\,.$$

Це приводить до системи лінійних диференціальних рівнянь відносно $C_{k\ell}(t)$.

Запишемо (1) у вигляді:

$$u(x,y,t) = \sum_{(k,\ell)\in\Im} C_{k\ell}(t)h_k(x)H_\ell(y). \quad (11)$$

Тоді для визначення $C_{k\ell}(t)$ отримаємо систему:

$$\sum_{(k,\ell)\in\Im} a_{pqk\ell}\,\dot C_{k\ell}(t) = -\sum_{(k,\ell)\in\Im} b_{pqk\ell}\,C_{k\ell}(t) + f_{pq}(t),\ t>0\,,\ (p,q)\in\Im\,, \quad (12)$$

де

$$a_{pqk\ell}=\iint\limits_G h_p(x)H_q(y)h_k(x)H_\ell(y)\,dx\,dy\,,$$

$$b_{pqk\ell}=\iint\limits_G\left[\frac{\partial}{\partial x}h_p(x)H_q(y)\cdot\frac{\partial}{\partial x}h_k(x)H_\ell(y)+h_p(x)\frac{\partial}{\partial y}H_q(y)\cdot h_k(x)\frac{\partial}{\partial y}H_\ell(y)\right]dx\,dy\,,$$

$$f_{pq}(t)=\iint\limits_G h_p(x)H_q(y)\,f(x,y,t)\,dx\,dy\,.$$

Проведемо сумування по кожній множині $\Im_1$, $\Im_2$, $\Im_3$ окремо. Отримаємо замість (12) систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{gathered}\sum_{(k,l)\in\Im_1}a_{pqk\ell}\,\dot C_{k\ell}(t)+\sum_{(k,\ell)\in\Im_2}a_{pqk\ell}\,\dot C_{k\ell}(t)+\sum_{(k,\ell)\in\Im_3}a_{pqk\ell}\,\dot C_{k\ell}(t)=\\=-\sum_{(k,\ell)\in\Im_1}b_{pqk\ell}\,C_{k\ell}(t)-\sum_{(k,\ell)\in\Im_2}b_{pqk\ell}\,C_{k\ell}(t)-\sum_{(k,\ell)\in\Im_3}b_{pqk\ell}\,C_{k\ell}(t)+f_{pq}(t),\ t>0\\C_{k\ell}(0)=\varphi(x_k,y_\ell)\,.\end{gathered}\tag{13}$$

Систему (13) запишемо у матричному вигляді:

$$A\frac{\partial c}{\partial t}=B\,c+G(t),\ t>0\,,\tag{14}$$

шляхом заміни чотиривимірних масивів $a_{pqk\ell}$, $b_{pqk\ell}$ на матриці $A_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ та матриці вільних членів $f_{pq}(t)$ на вектор $G(t)$, матрицю $C_{k\ell}(t)$ на вектор $c(t)$ згідно з описаним нижче алгоритмом.

Тут при формуванні результуючої матриці A, що відповідає написаним вище трьом матрицям, поводимося наступним чином:

$$A_{\mu\nu}=A1_{\mu\nu}\,,\quad 1\le\mu\le(m-1)(n_1-1),\ 1\le\nu\le(m-1)(n_1-1),$$

$$A_{(m-1)(n_1-1)+\mu\,,(m-1)(n_1-1)+\nu}=A2_{\mu\nu}\,,\quad 1\le\mu\le(m_1-1)(n-1-n_1),\ 1\le\nu\le(m_1-1)(n-1-n_1),$$

$$A_{(m-1)(n_1-1)+(m_1-1)(n-1-n_1)+\mu,\,(m-1)(n_1-1)+(m_1-1)(n-1-n_1)+\nu}=A3_{\mu\nu}\,,$$

$$1\le\mu\le(m-1-m_2)(n-1-n_1),\ 1\le\nu\le(m_1-1-m_2)(n-1-n_1)$$

Аналогічно формуємо матрицю B.

Зауваження. Якщо $d=b$, то в результаті отримаємо систему $A\dot c+Bc=f$, яка досліджувалася в [3] для прямокутної області.

Побудова точного розв’язку тестового прикладу з використанням сплайн-інтерлінації функцій

Побудуємо точний розв’язок задачі для тестового прикладу. Необхідно, щоб точний розв’язок належав до класу функцій, які мають неперервну похідну по t і неперервні другі похідні u''_{xx}, u''_{yy}. Для цього будемо шукати точний розв’язок тестового прикладу у вигляді 5 різних формул у 5 різних підобластях D_I, D_{II}, D_{III}, D_{IV}, D_V розбиття (рис. 2).

Будемо вважати, що на лініях $y=0$, $y=d$, $y=b$ точний розв’язок визначається наступними формулами:

$$\left.\frac{\partial^s ut}{\partial y^s}\right|_{y=0}=\varphi_{0,s}(x,t),\ \left.\frac{\partial^s ut}{\partial y^s}\right|_{y=d}=\varphi_{1,s}(x,t),\ \left.\frac{\partial^s ut}{\partial y^s}\right|_{y=b}=\varphi_{2,s}(x,t),\ s=\overline{0,2}\,.$$

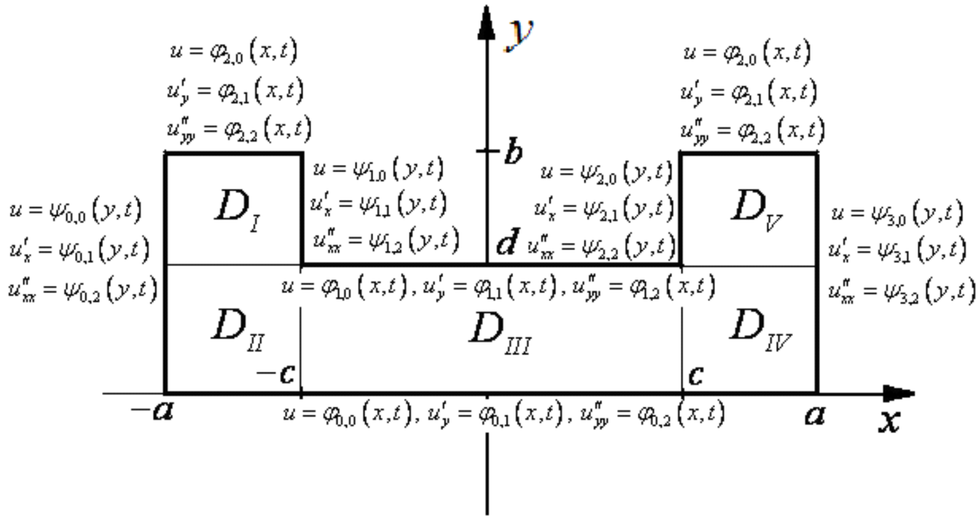


Рисунок 2 – Розбиття області D на підобласті та граничні умови на частинах границі області D, де $D=D_I\cup D_{II}\cup D_{III}\cup D_{IV}\cup D_V$

Точний розв’язок на лініях $x=-a$, $x=-c$, $x=c$, $x=a$ визначається формулами:

$$\left.\frac{\partial^s ut}{\partial x^s}\right|_{x=-a}=\psi_{0,s}(y,t),\ \left.\frac{\partial^s ut}{\partial x^s}\right|_{x=-c}=\psi_{1,s}(y,t),\ \left.\frac{\partial^s ut}{\partial x^s}\right|_{x=c}=\psi_{2,s}(y,t),$$

$$\left.\frac{\partial^s ut}{\partial x^s}\right|_{x=a}=\psi_{4,s}(y,t),\ s=\overline{0,2}.$$

При цьому

$$\varphi_{1,0}(x,t)=\begin{cases}\tilde{\varphi}_{1,0}(x,t),\ -a<x<-c\\ 0,\ -c<x<c\\ \tilde{\tilde{\varphi}}_{1,0}(x,t),\ c<x<a\end{cases},\qquad \varphi_{1,1}(x,t)=\begin{cases}\tilde{\varphi}_{1,1}(x,t),\ -a<x<-c\\ 0,\ -c<x<c\\ \tilde{\tilde{\varphi}}_{1,1}(x,t),\ c<x<a\end{cases},$$

$$\varphi_{1,2}(x,t)=\begin{cases}\tilde{\varphi}_{1,2}(x,t),\ -a<x<-c\\ 0,\ -c<x<c\\ \tilde{\tilde{\varphi}}_{1,2}(x,t),\ c<x<a\end{cases},$$

$$\psi_{1,0}(y,t)=\begin{cases}\tilde{\psi}_{1,0}(y,t),\ 0<y<d\\ 0,\ d<y<b\end{cases},\qquad \psi_{2,0}(y,t)=\begin{cases}\tilde{\psi}_{2,0}(y,t),\ 0<y<d\\ 0,\ d<y<b\end{cases},$$

$$\psi_{1,1}(y,t)=\begin{cases}\tilde{\psi}_{1,1}(y,t),\ 0<y<d\\ 0,\ d<y<b\end{cases},\qquad \psi_{2,1}(y,t)=\begin{cases}\tilde{\psi}_{2,1}(y,t),\ 0<y<d\\ 0,\ d<y<b\end{cases},$$

$$\psi_{1,2}(y,t)=\begin{cases}\tilde{\psi}_{1,2}(y,t),\ 0<y<d\\ 0,\ d<y<b\end{cases},\qquad \psi_{2,2}(y,t)=\begin{cases}\tilde{\psi}_{2,2}(y,t),\ 0<y<d\\ 0,\ d<y<b\end{cases},$$

де $\varphi_{ks}(x,t)$, $k=\overline{0,2}$; $\psi_{\ell p}(y,t)$, $\ell=\overline{0,3}$; $0\le s,p\le 2$ – довільні функції, які задовольняють умови С.М. Нікольського [5] у кутових точках.

Зокрема, в точці $(-a,0)$ мають вигляд:

$$\varphi_{0,s}^{(p)}(-a,t)=\psi_{0,p}^{(s)}(0,t),\ 0\le s,p\le 2,$$

що є наслідком незалежності мішаних похідних від порядку диференціювання:

$$\left.\frac{\partial^{s+p} ut}{\partial x^p \partial y^s}\right|_{(-a,0)} = \left.\frac{\partial^{p+s} ut}{\partial y^s \partial x^p}\right|_{(-a,0)}, \quad 0 \le s, p \le 2 .$$

Згідно з твердженням праці [7], у кутових точках області D точний розв'язок крайової задачі для диференціального рівняння Лапласа має особливість $r^{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot \sin \frac{\pi\varphi}{\alpha}$ ($r = r(x, y)$ – відстань від точки $(x, y) \in D$ до кутової точки, α – вхідний кут, φ – полярний кут).

Враховуючи однорідність граничних умов, в загальному випадку частинні похідні першого порядку в кутових точках $(-a,0)$, $(-a,b)$, $(-c,b)$, (c,b), (a,b), $(a,0)$ повинні дорівнювати нулю. Мішані похідні в цих точках не дорівнюють нулю. Частинні похідні другого порядку у цих точках теж дорівнюють нулю. Мішані похідні другого порядку у цих точках не дорівнюють нулю.

У точках зі вхідними кутами, тобто в точках $(-c, d)$ і (c, d), розв'язок $u(x, y, t)$ дорівнює нулю, в загальному випадку частинні похідні першого та другого порядку і мішані похідні $u^{(p,q)}(x, y)$ $(0 \le p, q \le 2)$ не дорівнюють нулю. Але у частинному випадку вони (або деякі похідні) можуть дорівнювати нулю.

Точний розв'язок $u(x, y, t)$ будемо шукати у вигляді:

$$u(x,y,t) = \begin{cases} u_I(x,y,t), & (x,y) \in D_I \\ u_{II}(x,y,t), & (x,y) \in D_{II} \\ u_{III}(x,y,t), & (x,y) \in D_{III} \\ u_{IV}(x,y,t), & (x,y) \in D_{IV} \\ u_V(x,y,t), & (x,y) \in D_V \end{cases},$$

де функції u_μ, $\mu = I, II, III, IV, V$ задовольняють умови на границях між сусідніми областями D_μ, що забезпечують виконання властивості $u \in C^{2,2,1}(R^3)$.

Зокрема,

$$u_I(x,y,t) = \sum_{k=1}^{2}\sum_{p=0}^{2} \varphi_{k,p}(x,t) S1_{k,p}(y) + \sum_{\ell=0}^{1}\sum_{q=0}^{2} \psi_{\ell,q}(y,t) S2_{\ell,q}(x) -$$

$$-\sum_{k=1}^{2}\sum_{p=0}^{2}\sum_{\ell=0}^{1}\sum_{q=0}^{2} u^{(q,p)}(x_k, y_\ell, t)\, S2_{\ell,q}(x)\, S1_{k,p}(y) .$$

При побудові тестового прикладу в даній роботі будемо використовувати лише два підходи (для побудови допоміжних функцій).

Підхід 1. $S1_{k,p}(y)$ будуємо у вигляді поліномів 5-го степеня, якщо вимагаємо, щоб у формулі інтерлінації використовувались і сліди функцій, і сліди перших та других похідних (в цьому випадку по змінній y маємо всього 3 вузлові точки $y_0 = 0$, $y_1 = d$, $y_2 = b$). Якщо у формулі Ерміта використовуються сліди функцій і перших похідних по y, то кожна така допоміжна функція буде поліномом 5-го степеня (6 коефіцієнтів можуть бути однозначно знайдені з 6 інтерполяційних умов). Якщо ж використовуємо формули, які при $y = y_0$, $y = y_1$, $y = y_2$ мають задані сліди та задані

сліди першої і другої похідних, то потрібно використовувати для побудови допоміжних функцій $S1_{k,p}(y)$ поліноми степеня 8, які мають 9 коефіцієнтів.

Аналогічно по змінній x. Якщо в кожній точці інтерполюємо лише функцію і похідну, то потрібно використовувати поліноми 7-го степеня, оскільки в 4 точках буде задано 8 умов. Якщо ж у кожній точці інтерполяції по x задана функція та перша і друга похідна, то на 4 точках по x нам потрібно задовольнити 12 умов. Таку кількість умов можна задовольнити поліномом 11-го степеня.

Підхід 2. Якщо використовуємо як допоміжні функції сплайни, то при умові, що нам необхідно, щоб точний розв'язок належав класу $C^1(\overline{\Omega})$, достатньо взяти сплайни 3-го степеня, оскільки в цьому випадку на кожному інтервалі (x_k, x_{k+1}) в точці x_k та в точці x_{k+1} можемо відновити значення функції та її перших похідних (4 умови).

Якщо хочемо, щоб тестова функція належала класу $C^2(\overline{\Omega})$, потрібно використовувати сплайни 5-го степеня, оскільки в точці x_k та в точці x_{k+1} будуть задані значення слідів функції, першої та другої похідних (6 умов). Тобто на цьому інтервалі можемо скористатися поліномом 5-го степеня, який має 6 коефіцієнтів.

Функції $S1_{k,p}(y)$, $S2_{l,p}(x)$, $k=\overline{0,2}$, $l=\overline{0,3}$, $p=\overline{0,2}$ є відповідними базисними поліномами Ерміта, їх похідні відповідного степеня повинні задовольняти визначені умови у вузлових точках. При визначенні цих функцій використовується позначення:

$$\{g(x)\}_a^{(n)}=\sum_{s=0}^{n} g^{(s)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}.$$

Зокрема, $S1_{0,0}(y)$ – поліном 3-го степеня з властивостями:

$$S1_{0,0}(y)\Big|_{y=0}=1,\; S1_{0,0}(y)\Big|_{y=d}=0,\; \left.\frac{dS1_{0,0}(y)}{dy}\right|_{y=0}=0,\; \left.\frac{d^2S1_{0,0}(y)}{dy^2}\right|_{y=0}=0.$$

$$S1_{0,0}(y)=(y-d)\left\{\frac{1}{y-d}\right\}_{y=0}^{(2)}=(y-d)\left(-\frac{1}{d}-\frac{y}{d^2}-\frac{y^2}{d^3}\right).$$

Припустимо, що точний розв'язок задачі має вигляд:

$$u(x,y,t)=e^{-\lambda t}\,\tilde{u}(x,y).$$

Права частина точного розв'язку задачі (7) – (9):

$$f(x,y,t)=-e^{-\lambda t}\left(\lambda\,\tilde{u}(x,y)+\Delta\tilde{u}(x,y)\right).$$

Графік функції $f(x,y,t)$ при $t=0$, $\lambda=2$, яка визначає щільність розподілу точкових джерел тепла у пластині, має вигляд (рис. 3):

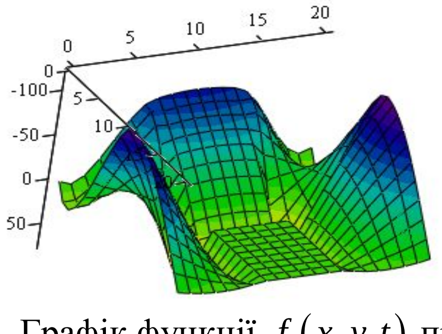


Рисунок 3 – Графік функції $f(x,y,t)$ при $t=0$, $\lambda=2$

Проведений обчислювальний експеримент показав, що відхилення наближеного розв'язку початково-крайової задачі з вказаною правою частиною $f(x,y,t)=e^{-\lambda t}\left(-\lambda\,\tilde{u}(x,y)-\Delta\tilde{u}(x,y)\right)$ має в рівномірній нормі похибку $\varepsilon=O\left(h^2\right)$, де h – крок розбиття, згідно з теоретичними твердженнями, що задовольняє співвідношенню (6).

Висновки

Таким чином, запропонований у роботі метод побудови точних розв'язків нестаціонарної задачі теплопровідності в областях, складених з прямокутників, дозволяє використовувати ці розв'язки для випадків, коли $u(x,y,t)\in C^{2,2,1}\left(\overline{D}\times(0,+\infty)\right)$.

Література

1. Сергієнко І.В. Чисельна реалізація методу ЛІДР для рівняння нестаціонарної теплопровідності / І.В. Сергієнко, О.М. Литвин // Доповіді АН УРСР. Сер.А. – 1990. – № 10. – С. 69-73.
2. Литвин О.М. Розв'язання нестаціонарної задачі теплопровідності для пластини інтерлінаційним методом скінченних елементів / О.М. Литвин, Л.С. Лобанова, Г.В. Залужна // Праці Міжнародного симпозіуму «Питання оптимізації обчислень (ПОО – XXXV)». – Київ : Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2009. – С. 14-19.
3. Литвин О.М. Про один метод побудови точного розв'язку початково-крайової задачі для рівняння нестаціонарної теплопровідності в області складної форми / О.М. Литвин, Л.С. Лобанова, Г.В. Залужна // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : Фізико-математичні науки : зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова Національної академії наук України ; Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. – 2010. – Вип. 4. – С. 132-138.
4. Литвин О.М. Про один метод побудови точних розв'язків крайової задачі для диференціальних рівнянь еліптичного типу в областях складної форми / О.М. Литвин, Л.С. Лобанова // Доповіді НАНУ. – 2011. – № 7.
5. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування : [монографія] / Литвин О.М. – Харків : Основа, 2002. – 544 с.
6. Г. Стренг. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. – М. : Мир, 1977.
7. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками / В.А. Кондратьев // Труды Московского математического общества. – 1967. – Т. 16. – С. 209-292.

Literatura

1. Sergijenko I.V., Lytvyn O.M. Dop. AN URSR. Ser.A. 1990. № 10. S. 69-73.
2. Lytvyn O.M, Lobanova L.S., Zaluzhna G.V. Praci Mizhnarodnogo sympoziumu "Pytannja optemizacii obchyslen' (POO – XXXV)". Kyiv: Instytut kibernetyky imeni V.M. Glushkova NAN Ukraini. 2009, S.14-19.
3. Lytvyn O.M., Lobanova L.S. Zaluzhna G.V. Matematychne ta komp'juterne modeljuvannja. Serija: Fizyko-matematych ninauky: zb. nauk. prac' / Instytut kibernetyky imeni V.M. Glushkova Nacional'noi akademii nauk Ukrainy, Kam'janec'-Podil's'kyj nacional'nyj universytet imeni Ivana Ogijenka. 2010. Vyp. 4. S. 132-138.
4. Lytvyn O.M., Lobanova L.S. Dopovidi NANU. 2011. № 7.
5. Lytvyn O.M. Interlinacija funkcij ta dejaki ii zastosuvannja. Monografija. Harkiv: Osnova. 2002. 544 s.
6. Streng G.,FiksDzh. Teorija metoda konechnyh jelementov. M.: Mir. 1977.
7. Kondrat'ev V.A. Tr. Moskovskogo mat. o-va .1967. T.16. S. 209-292.

O.N. Lytvyn, L.S. Lobanova, G.V. Zalyzhna

On the Approach to Testing of New Methods for Solving the Unsteady Heat Conduction Problem

This paper presents an analysis of the results of numerical experiments conducted by the authors using the program, which they create to solve problems in areas composed of rectangles. In this example, the boundary value problem solved by a test in which it was unaware of the exact solution constructed using the technique described in [1], as appropriate, transferred to the case of transient heat conduction problem.

In the article [2], it is considered in more detail the structure of the approximate solution, when the area is a rectangle. In this paper, the capabilities for the case of regions consisting of rectangles are investigated. In particular, the idea of this method is used to construct an exact solution of unsteady heat conduction problem, which belongs to the class $C^{2,2,1}\left(\bar{D}\times(0,+\infty)\right)$.

The problem of unsteady heat conduction is considered in an area that has the form of channel bars.

An approximate solution is sought in the form of:

$$u(x,y,t)=\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{\ell=1}^{n_1-1}C_{k\ell}(t)h_k(x)H_\ell(y)+\sum_{k=1}^{m_1-1}\sum_{\ell=n_1}^{n-1}C_{k\ell}(t)h_k(x)H_\ell(y)+\sum_{k=m_2+1}^{m-1}\sum_{\ell=n_1}^{n-1}C_{k\ell}(t)h_k(x)H_\ell(y),$$

where $(x,y)\in D,\ t\geq 0$.

The functions $C_{k\ell}(t)$ are found by minimizing the expression $J(u)$ using the method of local potential:

$$J(u)=\iint_D\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial u}{\partial t}-f(x,y,t)\right)u\right)dx\,dy.$$

This leads to a system of linear differential equations in the variables $C_{k\ell}(t)$.

In constructing the exact solution for a test case, there must be considered that the exact solution belongs to the class of functions that have a continuous derivative in t and continuous second derivatives u''_{xx}, u''_{yy}. To do this, we find the exact solution of test case in the form of 5 different formulas in 5 different subareas.

The method proposed in the work for constructing exact solutions of transient heat conduction problems in areas, which composed of rectangles, allows to use these solutions for cases where $u(x,y,t)\in C^{2,2,1}\left(\bar{D}\times(0,+\infty)\right)$.

Стаття надійшла до редакції 02.12.2011.